Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Tineretului

Olimpiada Naţională de Matematică 2008
Etapa judeţeană şi a Municipiului Bucureşti
1 martie 2008
CLASA A XII-A

Subiectul 1. Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă astfel încât $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$. Să se arate că există $c \in (0,1)$ astfel încât

$$f(c) = \int_0^c f(x)\mathrm{d}x.$$

Subiectul 2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi periodică, de perioadă T. Dacă F este o primitivă a lui f, să se arate că:

a) funcţia $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dată prin

$$G(x) = F(x) - \frac{x}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$$

este periodică;

b)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{F(k)}{n^2+k^2} = \frac{\ln\sqrt{2}}{T}\int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$$

Subiectul 3. Fie A un inel comutativ cu un număr impar de elemente. Dacă n este numărul soluţiilor ecuaţiei $x^2 = x$, $x \in A$, iar m este numărul elementelor inversabile ale inelului A, să se arate că n divide m.

Subiectul 4. Fie K un corp finit. Spunem că două polinoame f şi g din $K[X]$ sunt *vecine* dacă au acelaşi grad şi diferă prin exact un coeficient.

a) Să se arate că toţi vecinii polinomului $X^2 + \hat{1} \in \mathbb{Z}_3[X]$ sunt reductibili în $\mathbb{Z}_3[X]$.

b) Dacă numărul elementelor lui K este $q \geq 4$ să se arate că orice polinom de grad $q-1$ din $K[X]$ are atât un vecin reductibil în $K[X]$ cât şi un vecin care nu are nici o rădăcină în K.

Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii